Теория информационных процессов и систем

Развитие различных сфер человеческой деятельности на современном этапе невозможно без широкого применения вычислительной техники и создания информационных систем различного направления. Обработка информации в подобных системах стала самостоятельным научно-техническим направлением.

Последующее развитие науки привело в XVIII–XIX в. к возрастающей дифференциации различных научных направлений. На роль интеграции всех наук всегда претендовала наук философия. Однако философская терминология не всегда легко применяется в практической деятельности.

Поэтому потребности практики привели к созданию в 30-е годы 20-го столетия обобщающего направления, названного теорией систем. Основоположником этого направления считается биолог Л. фон Берталанфи. Общий характер задач теории систем привел к созданию большого количества близких к теории систем научных направлений:

Кибернетика. Применительно к задачам управления более широкое распространение получил термин кибернетика, принятый для названия новой "науки об управлении в живых организмах и машинах", созданной Н.Винером.

Системный подход. В системном подходе подчеркивалась необходимость исследования объекта с разных сторон.

Системные исследования. В системных исследованиях аппарат теории систем применялся для определенных классов систем. Во многом системные исследования являются обобщением на основе аппарата исследования операций таких направлений как – системотехника, системология и др.

Системный анализ. Под системным анализом наиболее часто понимают приложение системных концепций к функциям управления, связанным с планированием.

Теория систем. В теории систем основное внимание уделяется преобразованию выходных сигналов в выходные, выраженного в самом общем виде. При этом особое внимание уделяется вопросам определения и формализации целей систем.

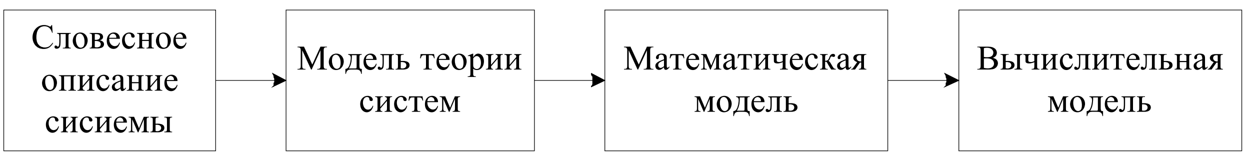


Рис. в.1. Различные уровни представления моделей систем

1. Теория систем

1.1. Основные понятия теории систем

Потребность в использовании понятия «система» возникала для объектов различной физической природы с древних времен: еще Аристотель обратил внимание на то, что целое (т. е. система - авт.) несводимо к сумме частей, его образующих. Единого определения понятия "система" пока не существует.

Людвиг фон Берталанфи определял систему как комплекс взаимодействующих элементов или как совокупность элементов, находящихся в определенных отношениях друг с другом и со средой.

В современных определениях понятия системы наряду с элементами, связями и их свойствами и целями начинают включать наблюдателя. Впервые на необходимость учета взаимодействия между исследователем и изучаемой системой указал один из основоположников кибернетики У. Р. Эшби.

М. Масарович и Я. Такахара в книге "Общая теория систем" считают, что система - "формальная взаимосвязь между наблюдаемыми признаками и свойствами".

Таким образом, в зависимости от целей исследования, учитываемых факторов и степени абстрактности, возможно, представить различные определения системы.

D1. Система есть нечто целое:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}(1, 0).$$

Это определение выражает факт существования и целостность. Двоичное суждение $\mathbf{A}(1, 0)$ отображает наличие или отсутствие указанного свойства.

Например:

Свойство	A
Внешний источник питания	1
Датчик температуры	1
Обратная связь	1
Регулятор типа реле	1
Нагревательный элемент	1

D2. Система есть организованное множество (Темников Ф. Е.):

$$\mathbf{S} = (\text{орг}, \mathbf{M}),$$

где орг – оператор организации; **M** – множество элементов.

Например: **M = {** нагревательный элемент; реле; датчик температуры }

орг = { вход → реле; реле → нагревательный элемент;

нагревательный элемент → датчик температуры; датчик температуры → реле }

D3. Система есть множество элементов, свойств и отношений (Уемов А. И.):

$$\mathbf{S} = (\{m\}, \{n\}, \{r\}),$$

где m – элементы, n – свойства, r – отношения.

Например:

m **= {** нагревательный элемент; реле; датчик температуры }

n = { температура = нагревательный элемент(ток, время работы);

[замкнуто | разомкнуто] = реле(ток);

сопротивление = датчик температуры(температура) }

r = { вход → реле; реле → нагревательный элемент;

нагревательный элемент → датчик температуры; датчик температуры → реле }

D4. Система есть множество элементов, образующих структуру и обеспечивающих определенное поведение и взаимодействие с окружающей средой:

$$\mathbf{S} = (\varepsilon, ST, BE, E),$$

где ε – элементы, ST – структура, BE – поведение, E – среда.

Например:

ε **= {** нагревательный элемент; реле; датчик температуры }

ST = { вход → реле; реле → нагревательный элемент;

нагревательный элемент → датчик температуры; датчик температуры → реле }

BE = поддержание заданной температуры;

E = { сеть 220 в.; поверхность материала }

D5. Система есть множество входов, множество выходов, множество состояний, характеризуемых оператором переходов и оператором выходов:

$$\mathbf{S} = (X, Y, Z, H, G),$$

где X – входы, Y – выходы, Z – состояния, H – оператор переходов, G – оператор выходов.

X = { сеть 220 в. }

Y = { температура }

Z = { состояние реле; температура; сопротивление датчика }

H = { состояние реле =реле(сопротивление датчика) ;

температура = характеристика нагревательного элемента(время нагрева, ток } ;

сопротивление датчика = характеристика датчика(температура) }

G = { 1 }

D6. Согласно, например, [4, 5] управляемую СУ можно представить как

$$\mathbf{S} = (T, X, U, \Omega, Y, \Gamma, \varphi, \eta),$$

где T — множество моментов времени; X — пространство состояний СУ; Y — множество значений выходных величин; U — множество значений входных величин; $\Omega = \{\omega\colon T \to U\}$ — множество допустимых значений входных величин; $\Gamma = \{\gamma : T \to Y\}$ — множество допустимых значений выходных величин; $\varphi\colon T \times X \times U \to X$ — функция, определяющая состояние системы в момент времени t по значениям координат, описывающих систему в начальный момент времени $(x_0 \in X)$, и входных величин $\omega \in \Omega$; $\eta\colon T \times X \to Y$ — функция, определяющая выходные отображения $y(t) = \eta(t, x(t))$.

D7. Для организационных и экономических систем удобно в определении системы учитывать следующее:

$$\mathbf{S} = (PL, RO, RJ, EX, PR, DT, SV, RD, EF),$$

где PL – цели и планы, RO – внешние ресурсы, RJ – внутренние ресурсы, EX – исполнители, PR – процесс, DT – помехи, SV – контроль, RD – управление, EF – эффект.

Элемент. Под элементом принято понимать простейшую неделимую часть системы. Таким образом, элемент - это предел деления системы.

Структура. Структура отражает наиболее существенные взаимоотношения между элементами и подсистемами, которые обеспечивают существование системы и ее основных свойств. Структура – это совокупность элементов и связей между ними.

Любой элемент системы можно рассматривать как самостоятельную систему

Каждый элемент системы описывается своей функцией. Под функцией понимается вещественно-энергетические и информационные отношения между входными и выходными процессами.

Если такой элемент обладает внутренней структурой, то его называют **подсистемой**. Термин "подсистема" подчеркивает, что часть системы обладает свойствами системы.

В зависимости от характера расположения подсистем различают составной и иерархический характер построения модели.

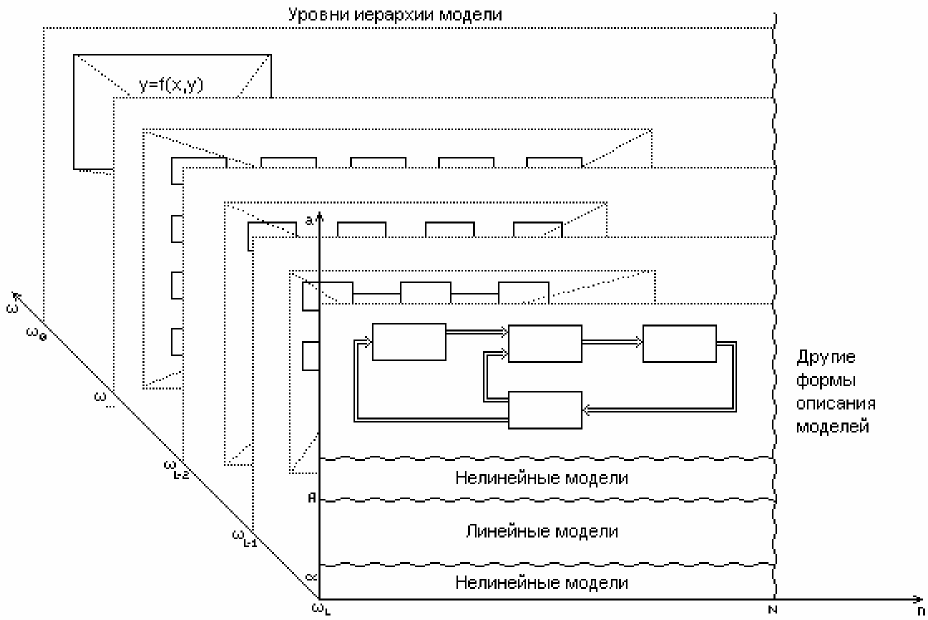


Рис 1.1. Принципы построения иерархических моделей

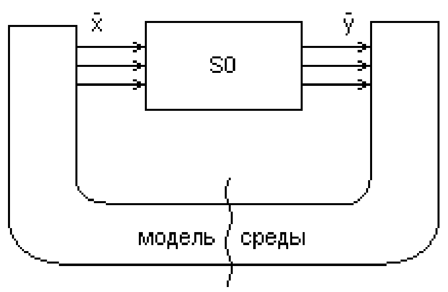
Связь. Главная причина неаддитивности систем – это наличие причинно–следственных связей элементов. Наличие связей между элементами приводит к качественно новому образованию в системе. Связи:

- направленные и не направленные;
- сильные и слабые;
- внешние и внутренние;
- обратные связи.

Состояние системы. Мгновенный срез значений всех переменных системы называется состоянием. Например, если система описывается векторами u_t, x_t и y_t, где u – входные сигналы, x – внутренние переменные, то $z_t = \{u_t, x_t, y_t\}$ описывает состояние системы в момент времени t.

Поведение. Переход системы из одного состояния в другое $z_{t+1} \to z_{t+2} \to \ldots \to z_{t+n}$, для моментов времени $t+1, t+2, \ldots, t+n$ называют поведением системы. Поведение системы можно представить как функцию времени $z(t) = f(t, u(t), z(t-1), z(t-2), \ldots)$.

Внешняя среда – это та часть исследуемой проблемы, которую мы вывели за рамки описания конкретной модели, но оказывающее на модель влияние.

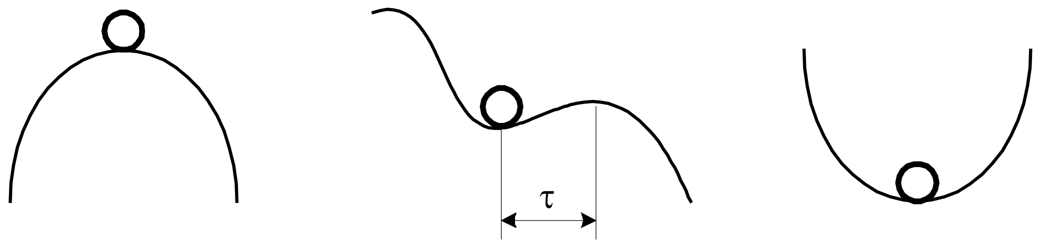
 Рис. 1.2. Модель внешней среды на входе и выходе системы	Фактически модель внешней среды можно рассматривать как модель $L+1$-го уровня иерархии описания, раскрывающая ее взаимодействие с более вышестоящими уровнями. Взаимодействие модели с моделью внешней среды на входе и выходе показано на рис. 1.2.

Модель. Понятие модели трактуется неоднозначно. В основе его лежит сходство процессов, протекающих в реальной действительности и в заменяемой реальный объект, моделью. В философии, под моделью, понимается широкая категория кибернетики, заменяющая изучаемый объект его упрощенным представлением, с целью более глубокого познания оригинала. Под математической моделью (в дальнейшем просто моделью) понимается идеальное математическое отражение исследуемого объекта.

Важными понятиями, отражающими поведение системы, являются: равновесие, устойчивость, развитие и цель системы.

Равновесие – способность системы, в отсутствии внешних воздействий сохранять свое состояние сколь угодно долго.

Устойчивость – способность системы возвращаться в состояние равновесия, после того, как она была выведена из него внешним воздействием.



а) б) в)

Рис. 1.3. Иллюстрация равновесных состояний: а – неустойчивого, б – устойчивого в малом, в – абсолютно устойчивое состояние

Развитие. Для описания сложных процессов в организационных системах было введено понятие развития, отражающее изменение основных закономерностей системы.

Цель. Понятие цель, обычно, определяли только для социальных, экономических или биологических систем, но усложнение кибернетических и технических систем потребовало введение в модель понятия целевой функции.

Классификация систем

Классификация систем производится по различным признакам. Отнесение системы к определенному классу позволяет указать математический аппарат, применимый для исследования данной системы.

В зависимости от особенностей системы можно классифицировать по следующим признакам:

- виду объекта – технические, химические, экономические, биологические и т.д.;
- по виду формального аппарата описания – детерминированные, стохастические;
- по типу – открытые, закрытые;
- по сложности структуры и поведения – простые, сложные;
- по степени организованности – хорошо организованные, плохо организованные, самоорганизующиеся.

Детерминированные системы. Детерминированные системы предполагают отсутствие в описании модели случайных параметров. Зная состояние системы в конкретный момент времени, и каким образом система пришла в это состояние, можно указать в каком состоянии окажется система в следующий момент времени: $z(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, \{t_n, z(t_n)\}, \{t_{n-1}, z(t_{n-1})\}, \ldots)$.

Стохастические системы. Для стохастических систем информации о предыдущем состоянии системы не достаточно для определения следующего состояния системы, так как в системе действуют случайные процессы. Для стохастической модели можно указать только вероятности нахождения системы в том или ином состоянии.

Хорошо организованные системы. В хорошо организованных системах четко определены все элементы и связи между ними. Например, структурная схема модели системы управления – блоки и связи – однозначно и полностью определяют описание системы.

Открытые системы предусматривают обмен информацией, энергией или другими ресурсами с внешней средой.

Закрытые системы не предусматривают подобного обмена.

Сложные системы. Понятие сложных систем неоднозначно. Можно рассматривать сложность системы с двух аспектов – сложность с точки зрения структуры и сложность с точки зрения поведения системы. Сложные системы будут рассмотрены в следующем параграфе.

Плохо организованные системы. В плохо организованных системах невозможно описать все компоненты и связи между ними. Плохо организованная система характеризуется набором параметров и закономерностями, полученными на основании выборок наблюдений. Примером плохо организованной системы могут быть модели диффузионных процессов, например биологические популяции, химические реакции.

Самоорганизующиеся системы. Самоорганизующиеся системы отличаются стохастичностью поведения, нестационарностью параметров, способностью адаптироваться к изменениям внешней среды на уровне структурных изменений и выбора оптимального с точки зрения собственной цели системы поведения.

1.2. Сложные системы

Понятие сложных систем неоднозначно. Можно рассматривать сложность системы с различных аспектов – размерности, структуры и поведения, причем структурная сложность может переходить в сложность поведения.

Большие системы. Самым простым способом классифицировать системы по сложности является количество элементов. В частности, в [] приводится следующая классификация:

малые системы – 10 … 10^3 элементов;

сложные системы – 10^4 … 10^7 элементов;

ультрасложные – 10^8 … 10^{30} элементов;

суперсистемы – 10^{31} … 10^{200} элементов.

Однако и 10^5 последовательно соединенных блоков идеального безынерционного усилителя вряд ли можно назвать сложной системой, в то же время система с тремя элементами может обладать настолько сложным и неоднозначным поведением, что система должна быть отнесена к сложным системам. Поэтому определение большой системы по количеству элементов можно считать не столь целесообразной. На практике чаще используется классификация сложных систем.

Сложные системы. Единого определения, какие системы можно считать сложными, нет. Разные авторы приводят различные определения. Например, А.И. Берг относит к сложным системам те системы, для полноты описания которых недостаточно одной формы описания. Например, модель может быть описана как детерминированная и стохастическая модель одновременно.

По А. А. Воронову сложной системой можно называть такую, которая содержит по крайней мере два нелинейных элемента, не сводимых к одному.

Очень часто сложными системами называют системы, которые нельзя корректно описать математически, либо потому, что в системе имеется очень большое число элементов, неизвестным образом связанных друг с другом, либо неизвестна природа явлений, протекающих в системе.

Структурно–сложные системы.

Сущность понятия структурной сложности связана с тем, что компоненты (подсистемы) сложной системы связаны между собой запутанным, трудным для восприятия образом. Важной чертой сложной системы является ее иерархическая организация. Некоторые авторы [], считают число уровней иерархии в системе приблизительной мерой ее сложности.

Для технических систем широкое распространение получил термин структурно–сложные системы управления (СС СУ).

По А.А. Вавилову сложная система управления представляет собой множество взаимосвязанных и взаимодействующих между собой подсистем управления, выполняющих самостоятельные и общесистемные функции и цели управления. Четкое определение и критерии СС СУ в настоящее время отсутствуют. Однако есть признаки, такие как, многомерность, многосвязность, многоконтурность, а так же многоуровневый, составной и многоцелевой характер построения, по которым можно отнести модель к классу СС СУ.

При разработке сложных систем возникают проблемы, относящиеся не только к свойствам их составляющих элементов и подсистем, но также к закономерностям функционирования системы в целом. При этом появляется широкий круг специфических задач, таких, как определение общей структуры системы; организация взаимодействия между элементами и подсистемами; учет влияния внешней среды; выбор оптимальных режимов функционирования системы; оптимальное управление системой и др.

Характерной особенностью сложных систем является наличие в составе системы совокупности подсистем с функциональной избыточностью. Простая система в случае отказа отдельного элемента прекращает выполнение своей функции, если отказавший элемент не был резервирован. Сложные системы при отказе отдельных элементов и даже целых подсистем не всегда теряет работоспособность, за счет функциональной избыточности системные функции перераспределяются на другие подсистемы.

Динамическая сложность.

Одним из основных показателей сложности системы является ее динамическое поведение, а именно: трудности объяснения и предсказания траекторий движущейся системы. Структурная сложность системы оказывает влияние на поведение системы, а, следовательно, и на ее динамическую сложность. Обратное утверждение не верно.

Система может быть структурно простой, но ее динамическое поведение может быть чрезвычайно сложным. Сложное поведение может быть вызвано не наличием нелинейностей, стохастических эффектов, а вызывается структурными особенностями системы – связями, присущими компонентам системы.

Понятие динамической сложности может определяться наличием в поведении системы жестких составляющих движений, связанных с разномасштабностью (разнотемповостью) процессов в системе, представленной данной моделью.

Ещё в 50-х годах прошлого века при моделировании динамических систем, описывающих, в частности, кинетику (кинетика — область знаний, которая изучает скорость и механизмы химических реакций) реагирующих друг с другом химических веществ, исследователи столкнулись с «неприятным» явлением. Расчёты производились с помощью хорошо отработанных программ с применением методов Рунге–Кутта при автоматическом выборе шага интегрирования. В процессе расчетов шаг численного интегрирования быстро уменьшался до минимума так, что часто не было никакой возможности получить процесс на требуемом для приложений отрезке времени, даже используя наиболее мощные ЭВМ. Визуальный анализ правых частей указывал на существенную разницу в значениях коэффициентов; они могли отличаться на несколько порядков. Затратив значительное машинное время, удалось получить начальные отрезки траекторий и провести анализ ситуации. Выявилась следующая характерная картина.

В начале процесса происходит сильное изменение вектора $\mathbf{v}(t)$ и выбираемый программой шаг численного интегрирования вполне разумен: он очень мал, но так и должно быть для интегрирования столь быстро меняющихся функций.

Через небольшое время t характер процесса резко меняется, он становится более гладким, медленно меняющимся, но программа этого «не замечает» и выбирает такой же малый шаг. Попытки «подсказать» программе выбор существенно большего шага, согласованного с гладкостью решения, немедленно приводили к вычислительной катастрофе — расходящемуся процессу.

Жёсткие модели встречаются в задачах ядерной физики, механики, электротехники, автоматического управления, экономики, биологии, медицины и т. д. Поэтому изучению свойства жёсткости моделей следует уделить особое внимание.

Поясним характер возникающих трудностей на примере поведения автономной линейной системы, состоящей из двух независимых подсистем:

$$\begin{aligned} &\frac{dv_1}{dt} + a_1 v_1 = 0, \\ &\frac{dv_2}{dt} + a_2 v_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

с начальными условиями $v_1(0), v_2(0)$, где $a_1 > 0, a_2 > 0$ — параметры системы.

Система (1.1) характеризуется свободными движениями

$$v_1(t) = v_1(0)\,\mathrm{e}^{-a_1 t}, \quad v_2(t) = v_2(0)\,\mathrm{e}^{-a_2 t},$$

монотонно убывающими с ростом t.

Предположим, что значение параметра a_2 значительно превышает значение a_1 $(a_2 >> a_1)$. Тогда компонента $v_2(t)$ затухает гораздо быстрее, чем $v_1(t)$, и, начиная с некоторого момента времени t, поведение системы, характеризуемое вектором $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t))^{\mathrm{T}}$, почти полностью определяется компонентой $v_1(t)$.

Однако при нахождении движения системы (1.1) разностным методом шаг интегрирования h определяется компонентой $v_2(t)$, несущественной с точки зрения поведения системы.

Например, явный метод Эйлера

$$\frac{x_{1\,n+1} - x_{1\,n}}{h} + a_1 x_{1\,n} = 0, \quad \frac{x_{2\,n+1} - x_{2\,n}}{h} + a_2 x_{2\,n} = 0, \tag{1.2}$$

где $x_{i\,n} = x_i(t_n),\ i = 1, 2$, будет устойчив, если шаг h удовлетворяет одновременно двум неравенствам: $a_1 h \le 2$, $a_2 h \le 2$. Поскольку $a_2 >> a_1 > 0$, условие устойчивости приводит к ограничению $h \le 2/a_2$.

Из анализа приведённого примера сразу становится ясным, что каждое из уравнений системы (1.2) следует решать независимо друг от друга со своим шагом интегрирования $h_j,\ j = 1, 2;\quad h_j \le 2/a_j$. Однако аналогичные трудности возникают и при исследовании поведения линейной модели СУ любой сложности, представленной в форме Коши

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v}, \tag{1.3}$$

если матрица коэффициентов $\mathbf{A}$ этой системы имеет большой разброс собственных чисел.

При оценке вычислительной сложности рассматриваемой задачи моделирования существенны два фактора:

1) строение поля направлений траекторий в окрестности изучаемой временной траектории;

2) свойства матрицы $\mathbf{A}$, а в более общем, нелинейном случае – свойства матрицы Якоби $\mathbf{J}(\mathbf{v})$.

Анализ поля направлений таких систем, получивших название «*жёстких*», дал характерную картину, представленную на рис. 1.3. Траектория $v(t)$ состоит из короткого участка быстрого её изменения, так называемого «*пограничного слоя*», и длительного участка очень медленной её эволюции, который обычно называют «*квазистационарным режимом*». Основные трудности связаны именно с расчетом последнего.

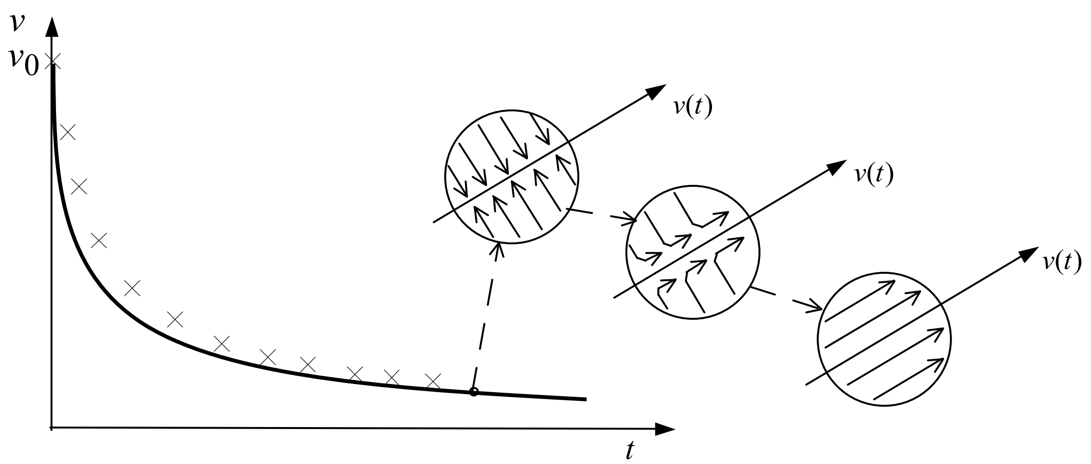


Рис. 1.3. Характер поля направлений для жёстких систем

Пограничный слой интегрируется с очень малым шагом, но он настолько краток, что время, затраченное на численное интегрирование, вполне приемлемо. На рис. 1.3 при помощи «микроскопа» с последовательно увеличивающимся разрешением показана структура поля направлений в окрестности $v(t)$ в квазистационарном режиме. Сначала видны траектории, отвесно падающие на $v(t)$. При следующем увеличении видно, что, приближаясь к траектории $v(t)$, они поворачиваются, стремясь двигаться параллельно $v(t)$. И лишь при ещё большем увеличении видна картина практически параллельных линий.

Если из точки $v(t)$ траектории сдвинуться по касательной в точку $v^*(t+h) = v(t) + h\dot{v}(t)$, то, хотя расстояние $v(t+h) - v^*(t+h) = O(h^2)$ ничтожно, фазовая скорость $\dot{v}^*(t+h)$ не имеет ничего общего с $\dot{v}(t+h)$. Направление фазовой скорости $\dot{v}^*(t+h)$ скорее напоминает перпендикуляр к траектории $v(t)$. То же самое получается и в случае представления $v^*(t+h)$ отрезком ряда Тейлора из трёх-четырёх и более членов при том значении h, которое можно было бы использовать для численного интегрирования квазистационарного режима.

Анализ матрицы **A** в окрестности траектории показал специфическую картину распределения собственных значений — спектра $\Lambda = \{\lambda_k\}$ матрицы **A**. На комплексной плоскости (рис. 1.4) выделяются две области Λ — область «жёсткого» $\overline{\Lambda} = \{\lambda_i\}$ и область «мягкого» $\widetilde{\Lambda} = \{\lambda_j\}$ спектров.

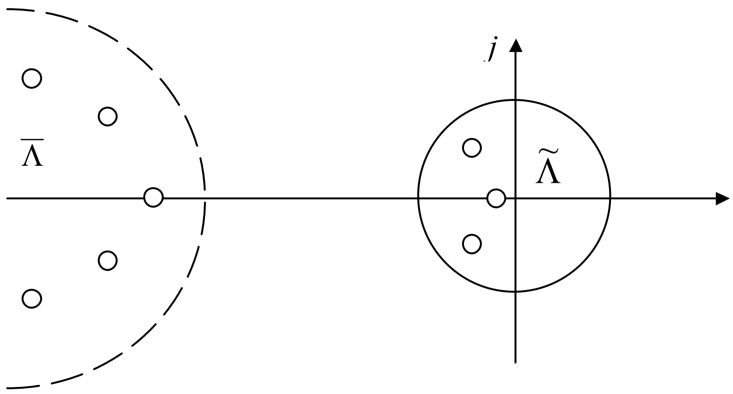


Рис. 1.4. Спектры собственных значений матрицы **A**
жёсткой системы

Определение

Система ДУ (1.3) с постоянной матрицей **A** размера $n \times n$ называется *жёсткой,* если

1) $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$, т. е. система асимптотически устойчива по Ляпунову;

2) отношение

$$S = \frac{\max\limits_{1 \le k \le n} |\mathrm{Re}\,\lambda_k|}{\min\limits_{1 \le k \le n} |\mathrm{Re}\,\lambda_k|}$$

велико, т.е. $S >> 1$ (на практике обычно принимают $S > 10$).

Отношение S принято называть *числом жёсткости* модели (1.3).

Если матрица $\mathbf{A}$ зависит от переменной t, то $\lambda_k = \lambda_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, n$. При каждом t можно определить число жёсткости

$$S(t) = \frac{\max\limits_{1 \le k \le n} \left|\operatorname{Re} \lambda_k(t)\right|}{\min\limits_{1 \le k \le n} \left|\operatorname{Re} \lambda_k(t)\right|}.$$

В этом случае свойство жёсткости может зависеть от длины отрезка интегрирования.

Нестационарная линейная модель СУ

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{v}$$

называется жёсткой на сегменте $\left[0, T\right]$, если

1) $\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \ \ \forall t \in \left[0, T\right]$;

2) число $\sup\limits_{t \in [0, T]} S(t)$ велико.

Процессы в жёсткой системе содержат как быстро убывающие, так и медленно убывающие составляющие. Начиная с некоторого значения $t > 0$ поведение системы почти полностью определяется медленно убывающими составляющими. Однако при использовании явных разностных методов быстро убывающие составляющие отрицательно влияют на устойчивость, что вынуждает выбирать шаг интегрирования h слишком малым.

Выход из этой парадоксальной ситуации был найден благодаря применению *неявных абсолютно устойчивых разностных методов*.

Например, систему (1.1) можно моделировать, используя неявный метод Эйлера

$$\frac{x_{1\,n+1} - x_{1\,n}}{h} + a_1 x_{1\,n+1} = 0, \quad \frac{x_{2\,n+1} - x_{2\,n}}{h} + a_2 x_{2\,n+1} = 0,$$

который абсолютно устойчив при всех $h > 0$. Поэтому шаг интегрирования h здесь можно выбирать, руководствуясь лишь соображениями точности, а не устойчивости.

Понятие жёсткости можно распространить и на случай нелинейной модели СУ

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{v}), \quad v(0). \tag{1.4}$$

Для этого зафиксируем какое-либо невозмущённое по Ляпунову движение $\mathbf{v}^*(t)$, удовлетворяющее (1.4), и образуем разность (приращение) вида $\delta\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}^*(t)$. Эта разность удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\delta\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{F}\Big(t, \mathbf{v}^*(t) + \delta\mathbf{v}(t)\Big) - \mathbf{F}\Big(t, \mathbf{v}^*(t)\Big). \qquad (1.5)$$

Будем считать, что $\delta\mathbf{v}(t)$ представляет собой малое возмущение невозмущённого движения $\mathbf{v}^*(t)$. Разложим в ряд Тейлора правую часть (1.5). Тогда

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{v}^* + \delta\mathbf{v}) - \mathbf{F}(t, \mathbf{v}^*) = \mathbf{J}(t, \mathbf{v}^*)\delta\mathbf{v} + O(\|\delta\mathbf{v}\|),$$

где

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{v}^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1(t, \mathbf{v}^*)}{\partial v_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1(t, \mathbf{v}^*)}{\partial v_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_n(t, \mathbf{v}^*)}{\partial v_1} & \dots & \dfrac{\partial F_n(t, \mathbf{v}^*)}{\partial v_n} \end{pmatrix} \text{ — матрица Якоби.}$$

Через $O(\|\delta\mathbf{v}\|)$ обозначен вектор величин более высокого, чем первый, порядка малости по $\delta\mathbf{v}$.

В результате разложения система (1.5) принимает вид

$$\frac{d\delta\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{J}(t, \mathbf{v}^*(t))\delta\mathbf{v}(t) + O(\|\delta\mathbf{v}\|). \qquad (1.6)$$

Отбрасывая в (1.6) величины $O(\|\delta\mathbf{v}\|)$, получим систему уравнений первого приближения (линеаризованную модель)

$$\frac{d\delta\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{J}(t, \mathbf{v}^*(t))\delta\mathbf{v}(t). \qquad (1.7)$$

Полученная система ДУ линейна относительно $\delta\mathbf{v}(t)$, так как функция $\mathbf{v}^*(t)$ задана. В общем случае модель (1.7) нестационарная.

Пусть $\lambda_k(t)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ — собственные числа матрицы $\mathbf{J}(t, \mathbf{v}^*(t))$. *Число жёсткости* нелинейной системы определяется как

$$S(t) = \frac{\max\limits_{1\le k\le n} \left|\operatorname{Re}\lambda_k(t)\right|}{\min\limits_{1\le k\le n} \left|\operatorname{Re}\lambda_k(t)\right|}.$$

Нелинейная модель (1.7) называется *жёсткой на временном сегменте* $[0,T]$ относительно невозмущённого движения $\mathbf{v}^*(t)$, если:

1) $\operatorname{Re}\lambda_k < 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \ \ \forall t \in [0,T]$;

2) число $\sup\limits_{t\in[0,T]} S(t)$ велико ($\sup S(t) >> 1$).

Структурная сложность СУ, наличие нелинейных характеристик элементов и постоянных времени динамических звеньев, отличающихся друг от друга на несколько порядков, могут привести к появлению жёстких составляющих движений в различных частях системы и на разных интервалах времени (пространственная и временная жёсткости). Установить свойство жёсткости без целенаправленного изучения поведения системы не представляется возможным, поэтому для нелинейных СУ со сложной структурой необходимы специальные устойчивые неявные многошаговые разностные методы (схемы) численного моделирования.

1.3. Закономерности систем

Целостность. Закономерность целостности проявляется в преобладании в системе свойств, не имеющихся у образующих систему элементов – за счет связей элементов образуется качественно новое образование, свойства которого не сводятся к простой сумме свойств элементов.

Можно рассмотреть два крайних случая:

1. Свойства системы не сводятся к простой сумме свойств составляющих систему элементов:

$$Q_s \neq \sum_{i=1}^{n} q_i ,$$

соответствующее свойству целостности. Здесь q_i свойство i–го элемента.

2. Связи в системе не оказывают существенного влияния на формирование свойств системы, которые в первую очередь определяются свойствами отдельных элементов:

$$Q_S = \sum_{i=1}^{n} q_i \; .$$

Данное состояние системы называется **физической аддитивностью**, оно свойственно системам, в процессе эволюции которых происходит распад на независимые элементы.

Реальная система, как правило, находится между двумя этими состояниями. В зависимости от динамики эволюции системы А. Холлом были ведены закономерности прогрессирующий факторизации и прогрессирующей систематизацией.

Прогрессирующая факторизация – стремление системы к состоянию физической аддитивности. В процессе своего развития система стремится к утрачиванию связей между компонентами.

Прогрессирующая систематизация – стремление системы к свойству целостности, уменьшению самостоятельности элементов и усиления роли связей между ними.

Интегративность. Термин интегративность характеризует причины формирования и сохранение свойства целостности системы. Интегративными называют системообразующие, системосохраняющие факторы, важными среди которых являются неоднородность и противоречивость ее элементов.

Коммуникативность. Свойство коммуникативности рассматривает систему в связи множеством коммуникаций с внешней средой или вышестоящей системы.

Иерархичность эта фундаментальная закономерность построения всех систем, в том числе и всего мира. Иерархичность как закономерность заключается в том, что свойство целостности проявляется на каждом уровне иерархии, на каждом следующем уровне возникают новые свойства, основанные на свойствах подсистем и их связей.

Эквифинальность. Термин эквифинальность был введен Л. фон Берталанфи для сложных открытых систем как способность (в отличие от состояний равновесия в закрытых системах) полностью детерминированных начальными условиями систем достигать не зависящего от времени состояния. Состояние эквифинальности не зависит от возможных исходных условий и определяется исключительно параметрами системы.

Это одна из наименее исследованных закономерностей. Она характеризует предельные возможности сложных систем, например биологических.

Историчность. Закономерность историчности отражает развитие системы во времени. Для любой системы можно выделить этапы разработки, внедрения, эксплуатации и вывода из эксплуатации. Экономность историчности проявляется в том, что для сложных технических систем необходимо уже на этапе закладывать в проект не только вопросы штатной эксплуатации системы, но и изменение параметров системы во время длительной эксплуатации, а так же плановый вывод системы на профилактику, плановое завершение эксплуатации системы и ее утилизация.

Закон необходимого разнообразия. Его впервые сформулировал У.Р. Эшби: чтобы создать систему, способную справиться с решением задач, обладающих определенным разнообразием, нужно, чтобы сама система обладала еще большим разнообразием, или была способна создать в себе это разнообразие.

Закономерность осуществимости и потенциальной эффективности систем. Большое значение для исследования систем играют предельные значения надежности, устойчивости, управляемости и ряда других показателей системы. Эти значения позволяют получить количественные оценки порогов осуществимости систем с точки зрения того или иного качества, а объединяя качества — предельные оценки жизнеспособности и потенциальной эффективности сложных систем.

Закономерность целеобразования. Исследования процесса целеобразования в сложных системах позволяют выделить следующие закономерности процессов обоснования и структуризации целей.

Зависимость цели от внутренних и внешних факторов. Для технических систем, с точки зрения «Теории управления», понятие цель рассматривается, как влияния внешних факторов. Для открытых, развивающихся систем цель формируется внутри системы. При анализе причин возникновения цели нужно учитывать как внешние по отношению к системе факторы, так и внутренние потребности. Цели могут возникать на основе противоречий как между внешними и внутренними факторами, так и в развитии закономерности целостности.

В процессе формирования цели, как правило, невозможно однозначно сформулировать цель для каждой из подсистем. Определение цели в этом случае сводится к нечеткому образу. Сведение целей отдельных подсистем для формирования глобальной цели, в большинстве случаев сводится к задаче структурирования целей. Наиболее часто для этих целей используется древовидная иерархическая структура.

В иерархической структуре целей, закономерность целостности проявляется на каждом уровне иерархии – достижение целей вышестоящего уровня включает в себя не только достижение локальных целей всех подуровней, но и реализации внешних факторов данного уровня, а так же собственных факторов уровня иерархии целей.

1.4. Методы и модели описания систем

Методы описания систем классифицируются на качественные и количественные методы:

- качественные методы – формализация задачи, формирование вариантов, качественная оценка вариантов;
- количественные методы – связаны с количественным анализом вариантов, расчетом характеристик.

Качественные методы системного анализа применяются, когда отсутствуют описания закономерностей систем в виде аналитических зависимостей. Рассмотрим некоторые из них.

Методы типа мозговой атаки. Методы этого типа известны также под названиями «мозговой штурм», «конференция идей», а в последнее время наибольшее распространение получил термин «коллективная генерация идей».

Суть мозговой атаки:

- обеспечить как можно большую свободу высказывания новых идей;
- приветствуются любые идеи, если вначале они кажутся сомнительными или абсурдными;
- не допускается критика, не объявляется ложной и не прекращается обсуждение ни одной идеи;
- желательно высказывать как можно больше идей, особенно нетривиальных.

Метод сценария. Метод предполагает подготовку документа, содержащего анализ рассматриваемой проблемы или предложения по ее решению. Сценарий помогает составить представление о проблеме, а затем приступить к более формализованному представлению системы.

Метод экспертных оценок. При использовании экспертных оценок предполагается, что мнение группы экспертов надежнее, чем мнение отдельного эксперта.

При обработке результатов коллективной экспертной оценки используются методы теории ранговой корреляции. Для количественной оценки степени согласованности мнений экспертов применяется коэффициент конкордации:

$$W = \frac{12d}{m^2(n^3 - n)},$$

где

$$d = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [\sum_{i=2}^{m} r_{ij} - 0.5m(n+1)]^2$$

m — количество экспертов, $j = \overline{1,m}$; n — количество рассматриваемых свойств, $i = \overline{1,n}$; r_{ij} — место, которое заняло i–е свойство в ранжировании j–м экспертом; d_i — отклонение суммы рангов по i–му свойству от среднего арифметического сумм рангов по n свойствам.

Коэффициент конкордации W $(0 \le W \le 1)$ позволяет оценить, насколько согласованы оценки экспертов. Значение $W = 0$ означает полную противоположность, а $W = 1$ — полное совпадение оценок всех экспертов. Хорошим считается результат $W = 0{,}7 \ldots 0{,}8$.

Согласованность показаний экспертов может быть оценена с помощью коэффициента ранговой корреляции:

$$\rho_{AB} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \psi_i^2}{\frac{1}{6}(n^3 - n) - \frac{1}{n}(T_A + T_B)},$$

где ψ_i — разность величин рангов оценок i-го свойства, назначенных экспертами А и В: $\psi_i = \left| R_{A_i} - R_{B_i} \right|$; T_A, T_B — показатели связанных рангов оценок экспертов А и В.

Коэффициент парной ранговой корреляции принимает значения —$-1 \le \rho \le +1$. Значение $\rho = +1$ соответствует совпадению оценок двух экспертов, а $\rho = -1$ – противоположным мнениям экспертов.

Метод «Дельфи». Метод «Дельфи» предполагает отказ от коллективных обсуждений. Это делается с целью уменьшить возможное влияние наиболее авторитетных специалистов на мнение остальных участников опроса. Обычно опросы в этом методе проводятся в виде анкетирования, без знания результатов остальных участников опроса.

Данная процедура повторяется многократно, до достижения требуемой согласованности мнения.

Метод дерева целей. Метод дерева целей предполагает построение древовидной или близкой к ней иерархической структуры, с выделением на каждом уровне целей и задач.

Морфологические методы (метод Цвики**).** Основная идея морфологических методов — систематически находить все «мыслимые» варианты решения проблемы или реализации системы путем комбинирования выделенных элементов или их признаков.

Наибольшее развитие получил метод морфологического ящика. Идея метода состоит в определении всех возможных параметров, от которых может зависеть решение проблемы, и представлении их в виде матриц-строк, а затем в определении в этом морфологическом матрице-ящике всех возможных сочетаний параметров по одному из каждой строки. Полученные таким образом варианты могут затем подвергаться оценке и анализу с целью выбора наилучшего.

Метод системного анализа. Метод системного анализа можно представить следующим образом:

1. Первый этап:
    1.1. Выделение системы от среды;
    1.2. Подход к выбору представления системы;
    1.3. Формирование вариантов представления системы.
2. Второй этап:
    2.1. Подход к выбору оценки вариантов;
    2.2. Выбор критериев оценки вариантов;
    2.3. Проведение оценка;

2.4. Обработка результатов оценки;

2.5. Анализ полученных результатов и выбор наилучшего варианта.

Количественные методы описания систем.

На практике используют следующие уровни абстрактного описания систем, условно разделенные на высшие и низшие уровни описания систем:

♦ Высшие уровни:

- символический, или, иначе, лингвистический;
- теоретико-множественный;
- абстрактно-алгебраический;
- топологический.

♦ Низшие уровни:

- логико-математический;
- теоретико-информационный;
- динамический;
- эвристический.

Высшие уровни описания систем.

Лингвистический уровень описания — наиболее высокий уровень абстрагирования. Система на лингвистическом уровне описания представляется в виде «термов» – объектов (элементов) исследования и высказываний – отношений между «термами», выраженные на определенном абстрактном языке.

Теоретико-множественный уровень. В соответствии с [3] СУ представляется в виде симплециального комплекса (гиперграфа) $\mathrm{K}_x(Y,\lambda)$, в котором элементы множества Y являются вершинами, а элементы множества X представляют симплексы, $\lambda \in X \times Y$ — бинарное отношение на прямом произведении $X \times Y$. Используемое понятие образа симплециального комплекса определяется как отображение Π, которое каждому симплексу σ^i из комплекса ставит в соответствие определенное число *k,* т. е.

$$\Pi\colon \sigma^i \to k,$$

где σ^i — i-й симплекс, k — число (целое, действительное). Каждый симплекс σ^i из числа входящих в комплекс обладает определенной размерностью (на единицу меньше числа вершин). Образ Π симплециального комплекса определяется прямой суммой

$$\Pi = \Pi_0 \oplus \Pi_1 \oplus \ldots \oplus \Pi_N,$$

где $N = \dim K$ — размерность комплекса, определяемая размерностью наибольшего из входящих в него симплексов. Динамику СУ можно представить как изменение образа Π в последовательно зафиксированные моменты времени процесса управления системой.

Абстрактно-алгебраический уровень. Согласно, например [4, 5], управляемую СУ можно представить как

$$S = (T, X, U, \Omega, Y, \Gamma, \varphi, \eta),$$

где T — множество моментов времени; X — пространство состояний СУ; Y — множество значений выходных величин; U — множество значений входных величин; $\Omega = \{\omega : T \to U\}$ — множество допустимых значений входных величин; $\Gamma = \{\gamma : T \to Y\}$ — множество допустимых значений выходных величин; $\varphi : T \times X \times U \to X$ — функция, определяющая состояние системы в момент времени t по значениям координат, описывающих систему в начальный момент времени $(x_0 \in X)$, и входных величин $\omega \in \Omega$; $\eta : T \times X \to Y$ — функция, определяющая выходные отображения $y(t) = \eta(t, x(t))$.

В работе [6] устанавливается глубокая связь между классами дискретных и непрерывных динамических систем (переход связан с заменой гомоморфизма абелевой группы гомоморфизмом векторного пространства и с заменой дискретного времени непрерывным).

Топологический уровень. Идеи алгебраической топологии используются для изучения динамики управляемых систем, в частности, при исследовании устойчивости на основе абстрактной функции А.М. Ляпунова [7].

Пусть L — некоторое линейное частично упорядоченное множество с отношением порядка $(\leq)$. Тогда пара $(L, \leq)$ определяет структуру этого упорядоченного множества, а функция

$$V : X \to (L, \leq)$$

называется обобщенной или абстрактной функцией А.М. Ляпунова. Здесь X — произвольное, L — частично упорядоченное множество. При использовании понятия базиса фильтра B, рассматривая его как некоторое семейство множеств

$$B = \cup h(x),$$

где $h(x)$ — элементы этого семейства, то аналогом известной теоремы Ляпунова об устойчивости является следующее утверждение: для того чтобы пара (x, B) была $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$-устойчива, необходимо и достаточно, чтобы для четверки величин $\langle X, B, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$ существовала абстрактная функция Ляпунова указанного выше типа.

Низшие уровни описания.

Логический уровень. Такая модель позволяет описать логику функционирования управляемой динамической системы [2]. Логическая схема алгоритма представляет собой выражение, составленное из последовательности операторов и логических условий, обусловленной сутью процесса функционирования изучаемой системы. Например, для СУ, состоящей из ОУ, УУ и каналов прямой и обратной связи между ОУ и УУ, схема алгоритма, характеризующего процесс функционирования, имеет вид

$$\downarrow \mathrm{P}(y_{\mathrm{C}}(t) \sim y_{\mathrm{P}}(t))\Gamma(y_{\mathrm{P}}(t) \to \mathrm{C})\mathrm{C}(y_{\mathrm{P}}(t) \sim y_{\mathrm{C}}(t))\Gamma(\ y_{\mathrm{C}}(t) \to \mathrm{P})\ \omega\uparrow,$$

где $\mathrm{P}(y_{\mathrm{C}}(t) \sim y_{\mathrm{P}}(t))$ отображает акт преобразования информации $y_{\mathrm{C}}(t)$ в информацию $y_{\mathrm{P}}(t)$ в ОУ; оператор $\Gamma(y_{\mathrm{P}}(t) \to \mathrm{C})$ — акт передачи информации $y_{\mathrm{P}}(t)$ от ОУ к УУ; $\mathrm{C}(y_{\mathrm{P}}(t) \sim y_{\mathrm{C}}(t))$ — акт переработки информации $y_{\mathrm{P}}(t)$ в информацию $y_{\mathrm{C}}(t)$ в УУ; $\Gamma(y_{\mathrm{C}}(t) \to \mathrm{P})$ — акт передачи информации $y_{\mathrm{C}}(t)$ от УУ к ОУ; Р — оператор, характеризующий функционирование ОУ; С — оператор, характеризующий функционирование УУ; ω — так называемое всегда ложное логическое условие. Основное правило: если логическое условие ложно, то должен действовать тот оператор, к которому ведет стрелка. Символ $\uparrow$ означает начало стрелки, а $\downarrow$ — ее конец. Введение символа ω и стрелки после него отображает действие СУ по принципу замкнутого цикла. Однако, такие свойства, как устойчивость и характер переходных процессов, оптимальность и т. п. только с помощью логики функционирования СУ определить не возможно.

Теоретико–информационный уровень. При теоретико-информационном уровне абстрактного описания систем информация выступает как свойство объектов и явлений (процессов) порождать многообразие состояний, которые передаются от одного объекта к другому и приводят к изменению структуры.

Отображение множества состояний источника во множество состояний носителя информации называется способом кодирования, а образ состояния при выбранном способе кодирования — кодом этого состояния.

Абстрагируясь от физической сущности носителей информации и рассматривая их как элементы некоторого абстрактного множества, а способ их расположения как отношения в этом множестве, приходят к абстрактному понятию кода информации как способа ее представления. Код информации можно рассматривать как математическую модель, то есть абстрактное множество с заданными на нем предикатами.

Предикат — условие, сформулированное в терминах точного логико-математического языка, содержащие обозначения для объектов (переменных).

Динамический уровень. Используются следующие понятия. *Многообразиями* называются такие множества, относительно которых можно полагать, что они локальны, т. е. в окрестности некоторого своего элемента, обладают свойствами евклидова пространства. Другими словами, пространство M называется многообразием в том случае, когда для каждой точки $x \in M$ существует окрестность U, гомеоморфная открытому множеству в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ [8, 9]. *Картой* на многообразии M именуется открытое множество $U \in M$ и присоединенный к нему гомеоморфизм α этого множества U на открытое множество в $\mathbf{R}^n$, т. е. карта — это пара (U, α). Величины $\alpha(x) \in \mathbf{R}^n$ называются локальными координатами точки $x \in U$. Совокупность карт, покрывающих все многобразия называются, называются *атласом*. Говорят, что отображение φ открытого множества $U \subset \mathbf{R}^n$ в пространство $\mathbf{R}^m$ принадлежит классу $\mathbf{C}^k, k=0,1,\ldots,\infty$, если функции $\varphi(k)$ имеют k непрерывных производных. Две карты (U, α) и (V, β), принадлежащие многообразию M, называются k-гладкосвязанными, если композиция отображений $\alpha \circ \beta$ и $\beta \circ \alpha^{-1}$ принадлежат классу $\mathbf{C}^k$. Многообразие M именуют *гладким* многообразием класса $\mathbf{C}^k$, если на нем задан атлас, состоящий из k-гладкосвязанных карт. Взаимно-однозначное преобразование одного многообразия M в другое N $(\varphi\colon M \to N)$ называется *диффеоморфизмом*, если φ

и φ^{-1} — гладкие отображения. В этом случае утверждают, что M и N диффеоморфны. Диффеоморфизм класса $\mathbf{C}^k$, $1 < k < \infty$, называется *дифференцируемым многообразием* класса $\mathbf{C}^k$. Структурой дифференцируемого многообразия M является класс его атласов, эквивалентных друг другу. Дифференцируемое многообразие порождает математическую структуру еще более общего характера — *однопараметрическую группу диффеоморфизмов многообразия* M.

Если в рассматриваемой динамической системе структура фазового пространства представляет собой дифференцируемое многообразие, то однопараметрической группой $\{g^i\}$ диффеоморфизмов многообразия M называют такое множество отображений $g\colon \mathbf{R} \times M \to M$; $g(t,x) = g^t$, $t \in \mathbf{R}$, $x \in M$, что: 1) g — дифференцируемое отображение; 2) при каждом $t \in \mathbf{R}$ отображение $g^t : M \to M$ — диффеоморфизм; 3) семейство $\{g^t, t \in \mathbf{R}\}$ является однопараметрической группой преобразований g. Для автономных динамических систем (неуправляемых и не подверженных внешним воздействиям) все эти требования выполняются. Поэтому утверждают, что основная задача теории обыкновенных ДУ состоит в исследовании однопараметрических групп $\{g^t\}$ диффеоморфизмов M, *векторных полей* на нем и связей между ними [8, 9]. Эта связь заключается в том, что фазовый поток $(M, \{g^t\})$, заданный однопараметрической группой диффеоморфизмов многообразия M, определяет вектор скорости движения изображающей точки в фазовом пространстве $g^t x = v(x)$, называемый фазовой скоростью потока в точке $x \in M$.

Левую часть этого выражения можно обозначить через dx/dt, то приходят к обычной форме записи ДУ, описывающего поведение изучаемой динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = v(x),$$

правая часть которого характеризует векторное поле $v(x)$ на многообразии M. Этим в полной мере устанавливается связь между двумя формами описания динамических систем: обычной с помощью ДУ, и как однопараметрической группы диффеоморфизмов многообразия. Возможность использования дифференцируемых структур для изучения управляемых динамических систем рассматривалось в [10 — 15]. Наибольшее распространение при исследовании управляемых динамических систем получила дифференцируемая структура, именуемая группой Ли. С помощью аппарата теории групп Ли были получены существенные результаты при решении задач инвариантности, декомпозиции и чувствительности управляемых систем [16, 17]. В [18] показано, что, используя понятия о дифференцируемых многообразиях и аппарат теории групп Ли, можно решить задачу выбора параметров динамической системы, обеспечивающих одновременно выполнение условий устойчивости и инвариантности, а также параметрической инвариантности. Применение дифференциальных форм позволило получить конструктивные удобные критерии управляемости для нелинейных систем определенного класса [12, 13].

Эвристический уровень абстрактного описания систем предусматривает поиски решения задач управления при наличии в сложной системе человека. Эврика — это догадка, основанная на общем опыте решения родственных задач.

В настоящее время бурно развивается эвристическое программирование — программирование игровых ситуаций, доказательства теорем, перевода с одного языка на другой, дифференциальной диагностики, распознавания образов (звуковых, зрительных и т. д.).

1.5. Кибернетический подход к описанию систем

Кибернетический подход к описанию систем состоит в том, что все системы рассматривается как системы управления. Теория управления — в широком, кибернетическом смысле — это обобщение приемов и методов, накопленных разными науками об управлении искусственными объектами и живыми организмами. В кибернетическом подходе система рассматривается с точки зрения выделения таких понятий как объект управления, субъект управления, среда.

Под управлением понимается процесс организации воздействия на объект управления, в результате которого удовлетворяются потребности субъекта.

Иллюстрация данного подхода приведена на рис. 1.5.

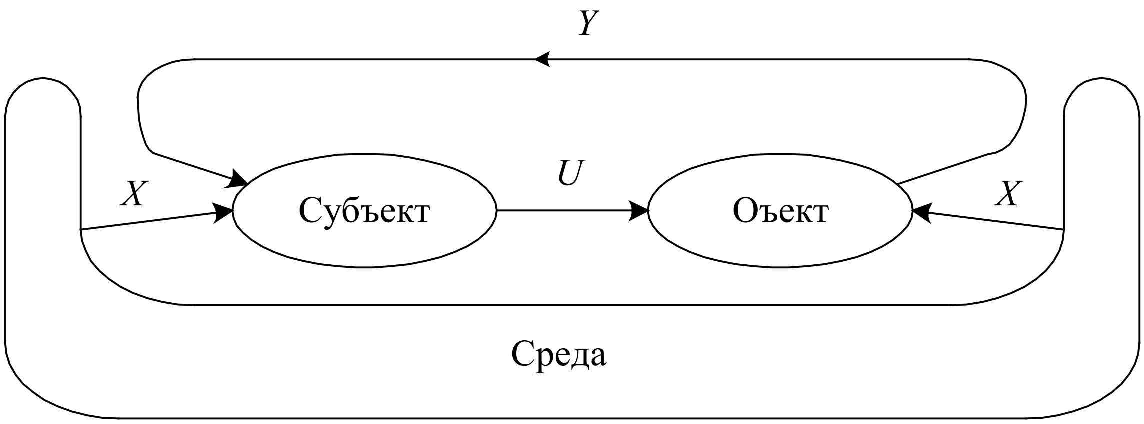


Рис. 1.5. Иллюстрация кибернетического подхода к описанию системы

Внешняя среда воздействует на объект и субъект управления – X. Субъект управления не может изменить состояние среды, но может воздействовать на объект управления – U по известным ему воздействиям среды X и состояния объекта Y.

Состояние объекта Y влияет на состояние потребностей субъекта $A = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$, где α_i — состояние i-й потребности субъекта.

Предполагается, что субъект, строит свое поведение исходя из минимизации своих потребностей:

$$\alpha_\iota(X,U) \to \min_{r \in R}(i = \overline{1,k}), \qquad (1.8)$$

где R — ресурсы субъекта.

Пусть U_x^* — решение задачи (1.8). Способ решения задачи (1.8), называется алгоритмом управления

$$U_x^* = \varphi(A_t, X), \qquad (1.9)$$

где φ — алгоритм управления по состоянию среды X и потребностей субъекта A_t. Потребности субъекта A_t являются функцией времени, отражая смену приоритетов, в процессе жизненного цикла системы и зависят от изменения состояния объекта и среды.

Алгоритм управления φ, иногда может быть записан в рекуррентной форме:

$$U_{N+1} = \varphi(U_N, A_t, X),$$

на каждом шаге улучшая управление

$$A_{t+1}(X, U_{N+1}) < A_t(X, U_N).$$

Синтез алгоритма управления φ, может быть разбит на две части:

$$A_t \to Z^* \to U^*.$$

На первом этапе формируются цели управления Z^*, на втором этапе по целям управления синтезируется управляющие воздействие U^*:

$$Z^* = \varphi_1(X, A_t),$$

$$U^* = \varphi_1(Z^*, X).$$

Разделение алгоритмов управления на две части φ_1 и φ_2 отражают разделение задач управления на задачи решаемые устройством управления и решения принимаемым самим субъектом. Задачи решаемые устройством управления могут быть формализованы и выполняться техническими средствами. Структура взаимодействия элементов системы управления представлена на рис. 1.6.

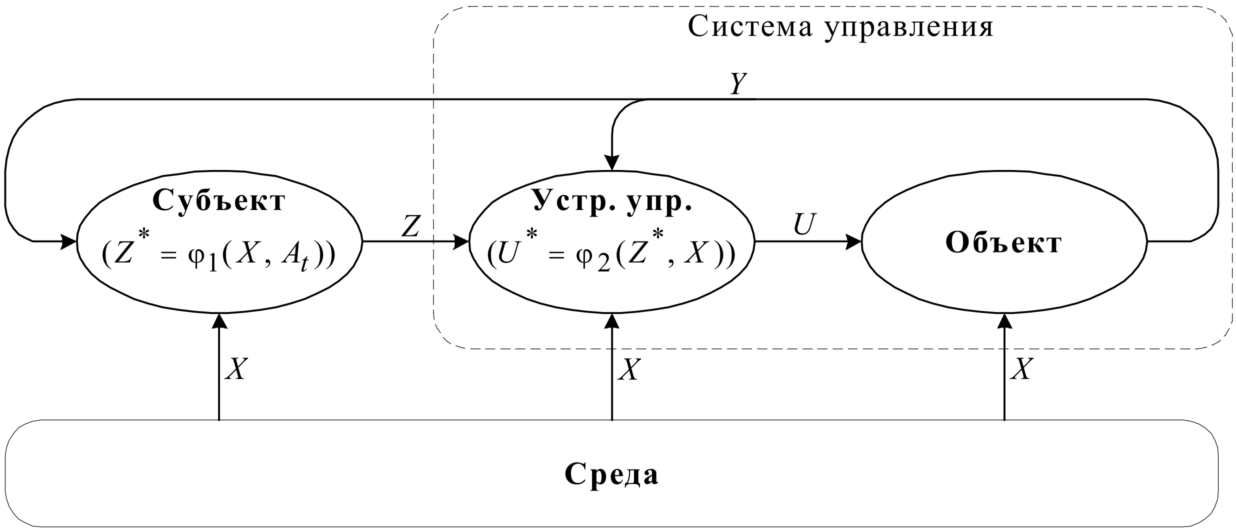


Рис. 1.6.

Структура взаимодействия элементов системы управления

Процесс управления — это информационный процесс, заключающийся в сборе информации о ходе процесса, передаче ее в пункты обработки, принятии решения, выработке соответствующего управляющего воздействия и передача его в устройство управления. На все компоненты системы оказывает влияние внешняя среда, а так же различного рода помехи.

Системы управления представляют собой особый класс динамических систем, отличающихся наличием самостоятельных функций и целей управления и необходимым для реализации этих функций и целей высоким уровнем специальной системной организации.

Можно выделить следующие этапы управления, представленного в виде алгоритма приведенного на рис. 1.7.

Рис. 1.7. Этапы управления

1. Формирование цепей. Цели управления могут определяться как по отношению к внешним условиям X, так и к потребностям субъекта A_t. Обычно для систем различают три вида целей: стабилизацию, ограничение, экстремальная цель. Стабилизация – поддержание параметров системы в заданных значениях $Z_i^* = k_i$. Ограничения – нахождение целевых переменных в установленных интервалах $k_i^{\text{нижн.}} \le Z_i^* \le k_i^{\text{верх.}}$. Экстремальная цель – достижение целевыми переменными максимальных значений $Z_i^* = \max(Z_i)$.

2. Определение объекта управления. На этом этапе происходит выделение объекта от внешней среды.
3. Структурный синтез модели. Этап структурного синтеза включает: определение внешней структуры модели, декомпозицию модели, определение внутренней структуры элементов модели.
4. Идентификация параметров модели объекта. Этот этап связан с определением числовых значений параметров звеньев модели.
5. Планирование эксперимента. Цель эксперимента – определить искомые параметры модели объекта управления, проверить гипотезы о структуре и параметров модели.
6. Синтез управления. Выбирается вид и параметры управляющих воздействий U, направленных на достижение заданных целей управления Z^*.
7. Реализация управления. На данном этапе По синтезированному управлению U, строится реальный сигнал управления U^*. В случае если при реализации управления с использованием данного сигнала управления U^*, не достигается поставленная цель, то необходимо вернуться к предыдущему блоку для переопределения целей управления, отвечающий изменению состояния системы Z и среды X.
8. Коррекция. Специфика сложных систем состоит в том, что информация, полученная на предыдущих этапах, приближенно отражает состояние системы. Изменения состояния системы Z и среды X может приводить к тому, что полученная на предыдущих стадиях цели управления, модель системы нуждаются в коррекции. В этом случае на рис. 1.7 показаны переходы на соответствующие блоки алгоритма.

В описания модели системы, необходимо учитывать всю совокупность взаимодействующих объектов. Структурная схема всей совокупности объектов взаимодействующих в системе управления показана на рис. 1.8.

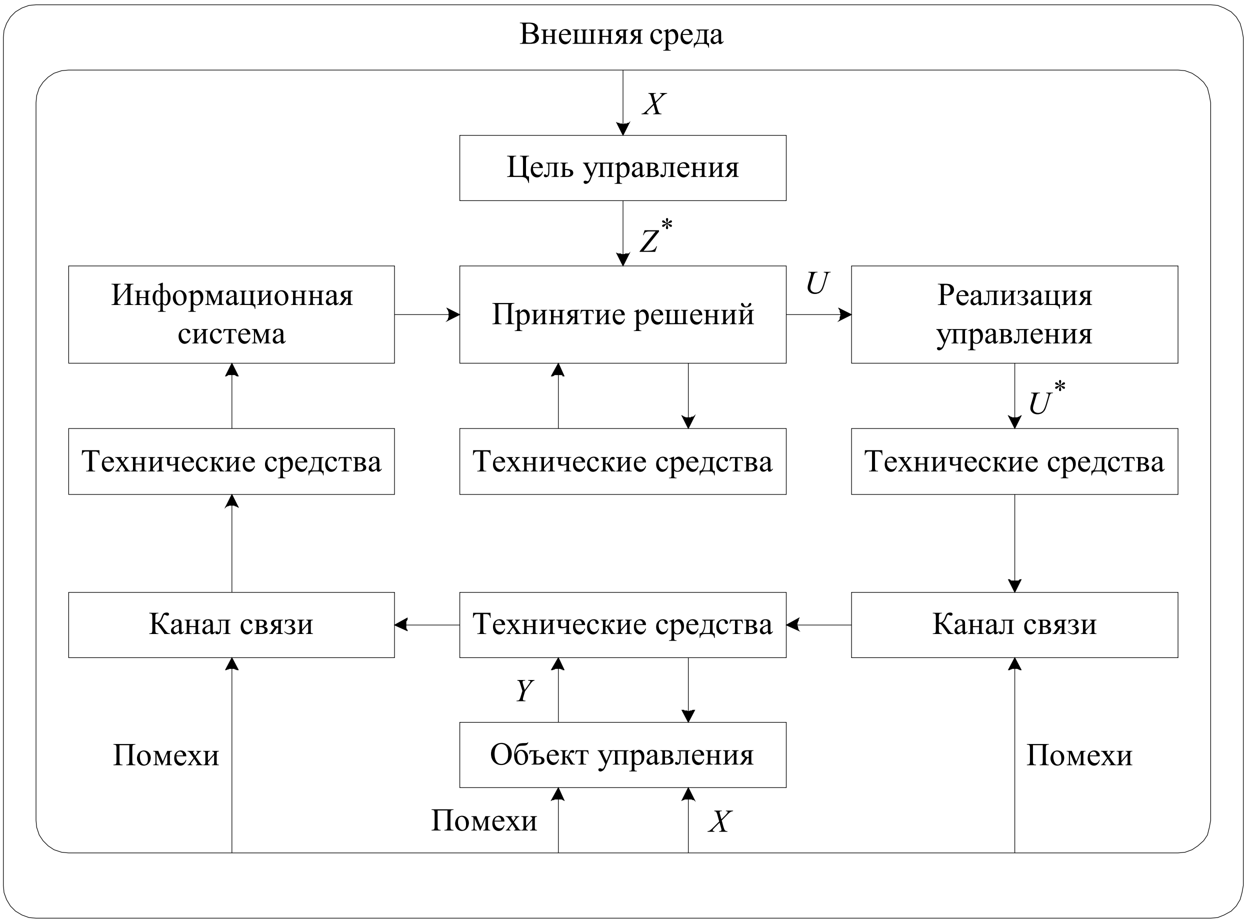


Рис. 1.8. Структурная схема системы управления

1.6. Моделирование систем

Моделирование представляет собой одну из основных категорий теории познания. На идее моделирования, по существу, базируется любой метод научного исследования — как теоретический, так и экспериментальный.

В самом широком смысле, моделирование — это методология научной и практической деятельности человека, основанная на изучении свойств и характеристик объектов различной природы посредством исследования *естественных* и *искусственных аналогов* объектов.

В более узком смысле, моделирование есть замещение одного объекта, называемого *оригиналом* или *натурой*, другим объектом, называемым *моделью*, позволяющим фиксировать и изучать *существенные свойства оригинала*.

Моделирование представляет собой двуединый процесс: создания (построения) модели; исследования модели после того, как она построена.

Модель является средством для описания, понимания и предсказания известных и новых явлений и процессов. Отсюда следуют основные функции модели — *объяснительная* и *прогностическая*. Модель строится для отражения лишь части свойств исследуемого объекта и поэтому, как правило, *проще оригинала*. Говорят, что модель сходна с познаваемым объектом только по определённой совокупности признаков.

Модели различаются по степени качественной и количественной адекватности исследуемому объекту относительно выбранных свойств и характеристик. Успех моделирования определяется удачным выбором моделей. Этот выбор часто субъективен и базируется на имеющихся экспериментальных и теоретических представлениях об объекте.

Для полного исследования объекта привлекают *набор частных моделей* [2], каждая из которых отражает те или иные свойства и характеристики объекта. Нередко для отражения одних и тех же свойств объекта целесообразно привлечение различных моделей. В этом состоит *принцип множественности описания объекта.*

Классификация видов моделирования систем приведена на рис. 1.9.

Рис. 1.9. Классификация видов моделирования

По степени полноты модели они делятся на полные, неполные и приближенные. **Полные модели** идентичны объекту во времени и пространстве. **Для неполного** моделирования эта идентичность не сохраняется. В основе **приближенного моделирования** лежит подобие, при котором некоторые стороны функционирования реального объекта не моделируются совсем.

В зависимости от характера изучаемых процессов в системе виды моделирования подразделяются на: детерминированные и стохастические, статические и динамические, дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные. **Детерминированное моделирование** отображает процессы, в которых предполагается отсутствие случайных воздействий. **Стохастическое моделирование** учитывает вероятностные процессы и события. **Статическое моделирование** служит для описания поведения объекта в фиксированный момент времени, а **динамическое** — для исследования объекта во времени. **Дискретное моделирование** работает с цифровыми моделями, **непрерывное моделирование** – с аналоговыми моделями. **Дискретно–непрерывные модели** оперируют с аналого-цифровыми моделями.

В зависимости от формы представления объекта моделирование классифицируется на мысленное и реальное. **Мысленное моделирование** применяется тогда, когда модели не реализуемы на практике. При мысленном моделировании выделяют:

- Наглядное моделирование – используется при невозможности построения формализованных моделей на основе представлений человека о системе, гипотезах протекания процессов, аналогий с подобными системами.

- Символическое моделирование – создание логического описания объекта, замещающего реальный объект и выражающего основные свойства его отношений с помощью определенной системы знаков и символов.

- Математическое моделирование системы есть приближённое количественное описание функционирования системы в определённых условиях и при принятых допущениях, выраженное с помощью математической символики.

Реальное моделирование – исследование на реальном объекте или его части. Реальное моделирование разделяют на:

- Натурное моделирование – проведение исследования на реальном объекте с последующей обработкой результатов эксперимента на основе теории подобия.

- Физическое моделирование – исследование на объектах сохраняющих физическое подобие оригиналу.

1.7. Теоретико–множественное описание систем

Теоретико–множественное описание исходит из следующих предположений о функционировании систем:

1. система функционирует во времени; в каждый момент времени система может находиться в одном из возможных состояний;
2. на вход системы могут поступать входные сигналы;
3. система способна выдавать выходные сигналы;
4. состояние системы в данный момент времени определяется предыдущими состояниями и входными сигналами, поступившими в данный момент времени и ранее;
5. выходной сигнал в данный момент времени определяется состояниями системы и входными сигналами, относящимися к данному и предшествующим моментам времени.

Последние два пункта отражают принцип физической реализуемости системы, заключающийся в том, что система не реагирует на входные сигналы еще не поступившие на ее входы.

В теоретико-множественной форме система определяется в виде:

$$S \subset \otimes\{V_i, i \in I\},$$

где V_i – вес компоненты; $i \in I$ – декартова произведения $\otimes V_i$, называемые объектами системы S; I – множество индексов. В кибернетике наибольший интерес представляют системы с двумя объектами — входным объектом X и выходным объектом Y:

$$S \subset X \otimes Y. \qquad (1.10)$$

Теоретико–множественная форма описания отличает:

1. Система определяется в терминах ее наблюдаемых свойств.

2. Система задается с помощью уравнений относительно соответствующих переменных. Каждая переменная соответствует некоторый элемент системы.
3. Для построения системы в теоретико–множественной форме необходимо сформировать структуру. Данная структура может быть поставлена в соответствии элементам – абстрактные системы, или элементам исходной системы – алгебраические системы.

Алгебраические системы.

Абстрактные системы.

1.8. Динамическое описание систем

Функционирование сложной системы можно представить как совокупность функций времени: $x(t)$ – внутреннее состояние системы; $y(t)$ – выходной процесс системы. Обе функции зависят от $u(t)$ – входного воздействия и от $f(t)$ – возмущения.

Для каждого $t \in T$ существует множество $z_i \in Z_i$ описывающего состояние системы в множестве n мерного пространства $Z = Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_n$. Поведение системы $z(t)$ – траектория в пространстве Z с координатами $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Произведение $U = T \times Z$ – является фазовым пространством системы.

Например, если система описывается двумя переменными z_1 и z_2 $(n = 2)$, то пространство состояния будет являться областью на плоскости Z_1, Z_2. Графическая интерпретация пространства состояния подобной системы приведена на рис. 1.10.

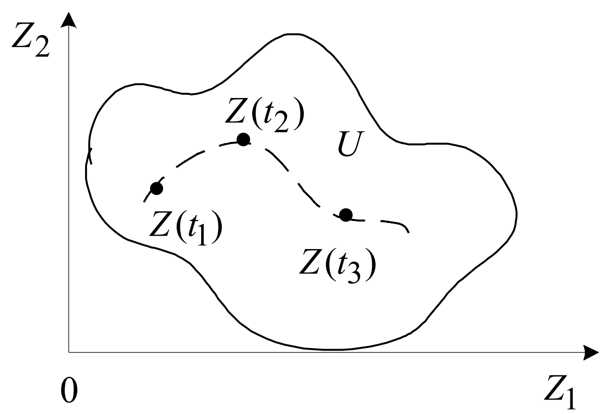


Рис. 1.10. Графическая интерпретация пространства состояния системы

Детерминированные системы без последствий.

Детерминированная система без последствий – система состояние которой $z(t_1)$ зависит только от $z(t_0)$ и не зависит от $z(0)\ldots z(t_0)$, т.е. $z(t_1)$ зависит от $z(t_0)$ и не зависит от того каким способом система попала в состояние $z(t_0)$. Графическая интерпретация процессов в детерминированной системы без последствий приведена на рис. 1.11.

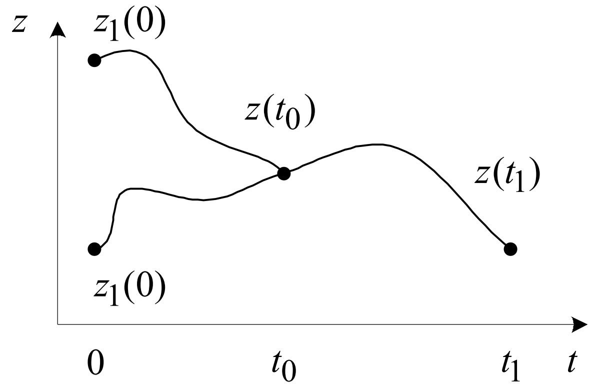


Рис. 1.11. Иллюстрация процессов в детерминированной системе без последствий

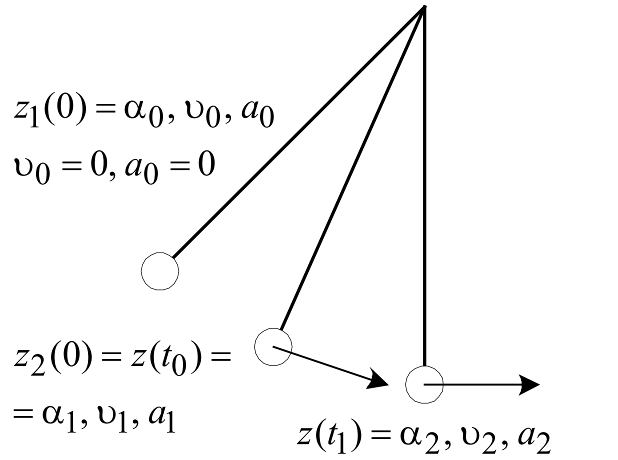


Рис. 1.12. Маятник – пример детерминированной системы без последствий

Примером детерминированной системы без последствий может служить маятник, показанный на рис. 1.12. Допустим, что для приведенного на рис. 1.12 маятника, в момент времени $t = 0$ система имеет следующие характеристики: угол отклонения стержня маятника α_0, скорость шарика и ускорение равны нулю $\upsilon_0 = 0, a_0 = 0$. В момент времени t_0, система будет иметь параметры $\alpha_1, \upsilon_1, a_1$. Рассмотрим другие начальные условия $Z_2(0)$. К маятнику, находящемуся под определенным углом отклонения, приложен толчок, придавший маятнику в момент времени t_0 скорость и ускорение υ_1, a_1. То есть в момент времени t_0 система из различных начальных условиях принимает одинаковое состояние. В момент времени t_1, параметры системы $\alpha_2, \upsilon_2, a_2$ не зависят от поведения системы на интервале времени $0 \ldots t_0$, а определяется только состоянием в момент времени t_0: $z(t_0) = \alpha_1, \upsilon_1, a_1$.

Для систем без последствия состояние можно описать как:

$$z(t) = H(t, t_0, z(t_0), (t, X_L]_{t_0}^{t}),$$

где $(t, X_L]_{t_0}^{t}$ – множество всевозможных отрезки входных сообщений, соответствующих интервалу $t_0 \ldots t$, $z(t_0)$ – начальное состояние системы, H – оператор переходов системы,

$$t \in T, t_0 \in T, z(t_0) \in Z, (t, X_L]_{t_0}^{t} \in \left\{(t, X_L]_{t_0}^{t}\right\}.$$

Формально систему можно записать в виде отображения

$$T \times T \times Z \times \left\{(t, X_L]_{t_0}^{t}\right\} \to Z .$$

На оператор переходов системы H накладываются следующие ограничения:

1. Состояние системы при $t = t_0$ должно совпадать с начальными значениями системы, то есть $z(t) = z_0, t = t_0$. Для этого оператор переходов системы, при пустом множестве отрезков входных сообщений, должен отвечать следующим требованиям:

$$H(t_0, t_0, z(t_0), (t, X_L]_{t_0}^{t_0}) = z(t_0) .$$

2. Если отрезки сообщений $(t, X_{L_1}]_{t_0}^{t}$ и $(t, X_{L_2}]_{t_0}^{t}$ совпадают на интервале $t_0 \ldots t$, то есть $(t, X_{L_1}]_{t_0}^{t} = (t, X_{L_2}]_{t_0}^{t}$, то

$$H(t, t_0, z(t_0), (t, X_{L_1}]_{t_0}^{t}) = H(t, t_0, z(t_0), (t, X_{L_2}]_{t_0}^{t}) .$$

3. При условии сочленения отрезков сообщений $(t, X_L]_{t_0}^{t_1}$ и $(t, X_L]_{t_1}^{t_2}$, при условии $t_0 < t_1 < t_2$, имеет равенство

$$H(t_2, t_0, z(t_0), (t, X_L]_{t_0}^{t_2}) = H(t_1, t_0, z(t_0), (t, X_L]_{t_0}^{t_1}) .$$

Графическая иллюстрация этого условия приведена на рис. 1.13.

Выходной сигнал детерминированной системы без последствий записывается следующим образом:

$$y(t) = G(t, t_0, z(t_0), (t, X_L]_{t_0}^{t}) ,$$

где G – оператор выходов системы.

В отличии от оператора

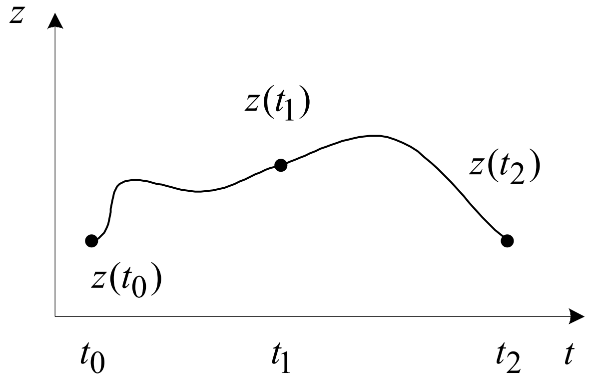


Рис. 1.13. Графическая иллюстрация сочленения отрезков сообщений

переходов H, оператор выходов допускает в множестве выходных сигналов Y существование пустого сигнала y_{null} – то есть отсутствия сигнала в какой – либо интервал времени.

В общем случае под детерминированной системе без последствий понимается упорядоченная совокупность:

$$\left(T, X, Z, Y, \{(t, X_L]_{t_0}^{t}\}, H, G\right),$$

в отношении элементов которой действуют изложенные выше ограничения.

Дальнейшее развитие описания детерминированных систем без последствий идет с точки зрения учета специфики воздействий, учета последствий и учета случайных факторов.

Детерминированные системы с последствиями.

Для многих систем недостаточно для определения состояния системы в момент времени t знать состояние системы в момент времени $z(t_0)$, кроме этого необходимо знать путь каким образом система пришла в эту точку n мерного пространства описывающего ее пространство состояния.

Например, гоночный автомобиль, который ездит по кольцевой трассе. В зависимости от того, сколько кругов он прошел до этого у него легче вес – израсходовано топливо, хуже сцепление с дорогой – стерта резина.

Для описания детерминированных систем с последствиями вводится предыстория $(t_{B_0}, z_{\omega})_{t_0}$, определяющая каким образом система пришла в состояние $z(t_0)$. Значение t_{B_0} должно отвечать следующим условиям: $t_{B_0} < t_0$, $t_{B_0} \subset B_0$, $t_0 \subset T$. Множество B_0 является подмножеством T, т.е. $B_0 \subset T$ для всех $t \subset B_0$, $t < t_0$. Отображение $B_0 \to Z$

содержится в функции $z_\omega = \omega(t)$. Оператор переходов H для детерминированной системы с последствиями выглядит следующим образом:

$$z(t) = H(t, (t_{B_0}, z_\omega)_{t_0}, t_0, z(t_0), (t, X_L]_{t_0}^{t}).$$

1.9. Агрегатное описание систем

Агрегат – унифицированная схема, получаемая наложением дополнительных ограничений на множества состояний, сигналов и сообщений и на операторы переходов, а так же на операторы выходов.

Будем считать что $t \in T$ – моменты времени; $x \in X$ – входные сигналы; $u \in U$ – управляющие сигналы; $y \in Y$ – выходные сигналы; $z \in Z$ – состояния. Входные и выходные сигналы и переменные состояния: $x(t), u(t), y(t), z(t)$ являются функциями времени.

Агрегат это объект, заданный операторами H и G над множествами T, U, X, Z, Y.

Отличительной особенностью операторов H и G является то, что они состоят из нескольких частей, первая из которых, с определенной вероятностью выбирает моменты времени, а вторая так же случайно выбирает сигналы из заданного множества.

Оператор перехода H реализуется как совокупность случайных операторов H', H'' и H'''. Внешний вид оператора перехода:

$$z(t) = H'''(t, t_0, z(t_0), u_0, \beta),$$

структура оператора перехода агрегата приведена в [].

Оператор выходов G реализуется как совокупность операторов G' и G''. Оператор G' выбирает моменты времени выдачи выходных сигналов, а оператор G'' – выходной сигнал. Оператор выхода выглядит следующим образом:

$$y = G''(t, z(t), u(t), \beta).$$

В приведенных формах: t – время, $u(t)$ – управляющие сигналы, $z(t)$ – состояние, β – пространство параметров агрегата. Оператор G'' является случайным и, в зависимости от вероятности и по значениям аргументов оператора – t, $u(t)$, $z(t)$, β, на выходе он выводит одно значение из множества возможных значений выходных сигналов.

Работу агрегата можно представить следующим образом. В моменты поступления входных сигналов, которые рассматриваются как случайные события, происходит генерация случайного процесса, или случайный выбор одного из процессов из множества процессов, описывающих поведение агрегата.

В зависимости от особенностей функционирования выделяют кусочно–марковский, кусочно–непрерывный и кусочно–линейные агрегаты.

Кусочно–марковский. Агрегат называется кусочно–марковским, если на любом не содержащим поступления внешних сигналов интервале времени $[t_0, t]$ и фиксированном начальном значении $z(t_0) = z_0$ агрегат ведет себя как обрывающийся марковский процесс. К марковским процессам относят процессы …..(определение)

Кусочно–непрерывный. К кусочно–непрерывным агрегатам относятся агрегаты описывающиеся марковским–процессом при фиксированных сигналах и моментах их поступления на входы агрегата.

Кусочно–линейные агрегаты. Кусочно–непрерывный агрегат, переменные состояния $z(t)$ которого описываются в виде дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dz(t)}{dt} = F(t, z),$$

относится к кусочно–линейным агрегатам. Функция выбирается случайным образом из множества возможных вариантов по заданным вероятностям.

Модели теории систем позволяют описывать системы на самом общем уровне, абстрагируясь от конкретной природы изучаемых процессов.